Ayudantía 8.

1. Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 120\,x(y-x)(1-y), & 0 \le x \le y \le 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a. (15 pts) Determine la densidad marginal de Y.

b. (15 pts) Obtenga la densidad condicional de X dado $Y = y$.

c. (10 pts) Calcule $P(X > \frac{1}{4} | Y = \frac{1}{2})$.

d. (10 pts) Calcule $\mathrm{E}(X|Y = \frac{1}{2})$.

a. $$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,y)\,dx$$

$$= \int_0^y f_{XY}(x,y)\,dx$$

$$= \int_0^y 120x(y-x)(1-y)\,dx$$

$$= 20(1-y)y^3 \; ; \quad y \in (0,1)$$

b. $$f_{X|Y=y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{120x(y-x)(1-y)}{20(1-y)y^3} = \frac{6x(y-x)}{y^3} \; ; \quad x \in (0,y)$$

c. $$\mathbb{P}(X > 1/4 \,|\, Y = 1/2) =$$

$$= \int_{1/4}^{1/2} f_{X|Y=1/2}(x|1/2)\,dx$$

$$= \int_{1/4}^{1/2} \frac{6x(1/2 - x)}{(1/2)^3}\,dx$$

$$= 0.5$$

d. $$E[X|Y=1/2] = \int_0^{1/2} x \cdot f_{X|Y=1/2}(x|1/2)\,dx$$

$$= \int_0^{1/2} x \cdot \frac{6x(1/2 - x)}{(1/2)^3}\,dx$$

$$= 0.25$$

2. (25 pts) Sean X, Y variables aleatorias independientes, cada una con distribución $\text{Exp}(1)$[1]. Se define las variables aleatorias U y V como:

$$U = \frac{X}{X+Y}, \qquad V = X + Y.$$

Encuentre la densidad conjunta de (U, V).

Nota que $f_X(x) = e^{-x}$; $f_Y(y) = e^{-y}$

$$\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) \underset{\text{ind.}}{=} f_X(x) \cdot f_Y(y) = e^{-(x+y)}$$

Tenemos la Transformación

$$U = \frac{X}{X+Y} \quad ; \quad V = X + Y$$

$$\Rightarrow U = \frac{X}{V} \Rightarrow X = UV$$

Análogamente ; $V = UV + Y \Rightarrow Y = (1-U)V$

Además $x = g_1^{-1}(u,v) = uv$

$y = g_2^{-1}(u,v) = (1-u)v$

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |J|_+ = v(1-u) - (-v)u$$

$$= v - uv + uv$$

$$= v$$

Finalmente:

$$f_{U,V}(u,v) = |J|_+ \cdot f_{X,Y}\left(g_1^{-1}(u,v), g_2^{-1}(u,v)\right)$$

$$= v \cdot e^{-uv} \cdot e^{-(1-u)v}$$

$$= v \exp\left(-uv - v + uv\right)$$

$$= v\exp(-v) \ ; \quad v > 0 \ //$$

2. (25 pts) Sean X, Y variables aleatorias independientes, cada una con distribución Exp(1). Se define las variables aleatorias U y V como:

$$U = \frac{X}{X+Y}, \quad V = X + Y.$$

$f_X(x) = e^{-x}$

$f_Y(y) = e^{-y}$

Encuentre la densidad conjunta de (U, V).

Sol:

$$\boxed{f_{X,Y}(x,y) \underset{\text{ind}}{=} f_X(x) \cdot f_Y(y) = e^{-(x+y)}}$$

- $U = \frac{X}{V} \Rightarrow X = UV$
- $V = UV + Y \Rightarrow Y = (1-U)V$

$x = uv \; ; \; y = (1-u)v$

$$\iint_{\Omega} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega^*} f_{U,V}(u,v)|J|_{+}^{-1}\,du\,dv$$

obs:

$$J = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{pmatrix}$$

$$\det(J) = v(1-u) - (-v)u$$

$$= v - uv + uv$$

$$= v$$

$$\Rightarrow f_{UV}(u,v) = v \cdot e^{-(x+y)}$$

$$= v e^{-(u \cdot v + (1-u)v)}$$

$$= v e^{-v}$$

$$f_{XY}(x,y) = f_{UV}(u,v)|J|^{-1}$$

$$\Rightarrow f_{UV}(u,v) = |J|\, f_{XY}(x,y)$$

7. La concentración de sustancias X e Y en las emisiones de un coche elegido al azar siguen distribución con función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-y} & 0 \le y \le x \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El coche pasa la ITV si $2X + Y \le 9$.

a) Calcular la probabilidad de que un coche elegido al azar pase la ITV. R: 0,963

b) Se mide la concentración de la sustancia Y que emite un vehículo y se encuentra que $Y = 2$. Calcular la probabilidad de que la concentración de X sea mayor que 4. R: 0,135

c) Calcular la probabilidad de que un coche ha pasado la ITV emita una concentración de la sustancia Y mayor que 2. R: 0,0098

c. $\mathbb{P}(2X+Y \le 9) = 0{,}963$

$$\boxed{\mathbb{P}(Y > 2 \mid 2X+Y \le 9)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(Y>2 \wedge 2X+Y \le 9)}{\mathbb{P}(2X+Y \le 9)}$$

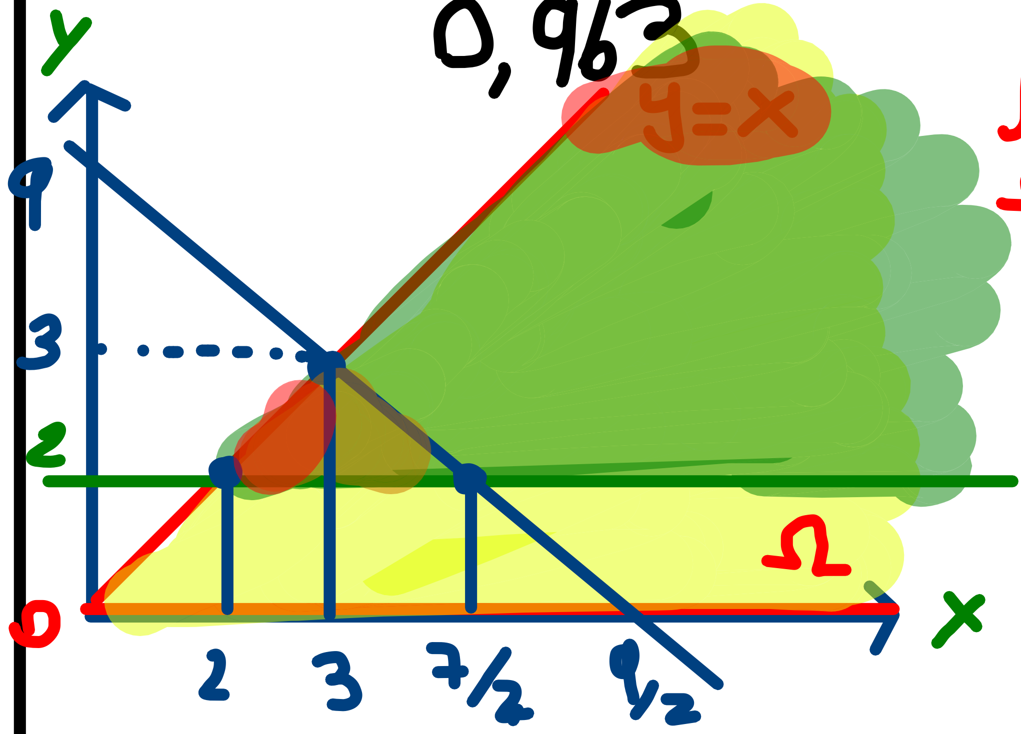
$$= \frac{\mathbb{P}(Y>2 \wedge 2X+Y \le 9)}{0{,}963}$$

$2 = -2x+9$

$\rightarrow Y \le -2x+9$

$x = -2x+9$

$\Rightarrow x = 3$



$\iint_\Omega f = 1$

$$\int_2^3 \int_2^x f_{XY}(x,y)\,dy\,dx + \int_3^{7/2} \int_2^{-2x+9} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx$$

$$\int_2^3 \int_2^x 2e^{-x-y}\,dy\,dx + \int_3^{7/2} \int_2^{-2x+9} 2e^{-x-y}\,dy\,dx$$