Modelos de Probabilidad

Sea $X \sim Bin(n,p)$

$\mathbb{P}(X \leq K) = \text{Pbinom}(K,n,p)$

Además: Si $\mathbb{P}(X \leq K) = C$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} K = \text{qbinom}(C, n, p) \\ C = \text{pbinom}(K, n, p) \end{array}}$$

Ej; ¿ $X \sim Poi(\lambda)$; $\mathbb{P}(X > 3)$?

$\mathbb{P}(X>3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3)$

$= 1 - P\text{"Poisson"}(3, \lambda)$; $\lambda = 0.3$

$= 1 - \text{PPois}(3, 0.3)$

≈ 0.01 //

$X \sim Bin(5, 0.3)$;

$\mathbb{P}(X < 2) = \mathbb{P}(X \leq 1)$

$= \text{Pbinom}(1, 5, 0.3)$

≈ 0.52 //

Problema 1

La ocurrencia en el tiempo de ciertas cargas estructurales en una construcción de concreto se puede modelar a través de una distribución de Poisson. Suponga que el tiempo promedio entre ocurrencias de cargas es medio año.

1. ¿Cuántas cargas se espera que ocurran durante dos años?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran más de 3 cargas durante dos años?
3. ¿Cuán largo debe ser un periodo para que la probabilidad de que no ocurra ninguna carga durante ese tiempo sea a lo sumo 0.1?

1. Se esperan 4 ocurrencias en 2 años.
2. X: "número de ocurrencias en 2 años"

R: $\mathbb{P}(X > 3)$; $X \sim Poi(E[X])$

con $X \sim Poi(4)$

$\mathbb{P}(X > 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3)$

$= 1 - \text{PPois}(3, 4)$

≈ 0.56

3. ¿Cuán largo debe ser un periodo para que la probabilidad de que no ocurra ninguna carga durante ese tiempo sea a lo sumo 0.1?

R: $\mathbb{P}$("El número de ocurrencias en t años es 0") ≤ 0.1

X: El número de ocurrencias en t años.

$\Rightarrow \mathbb{P}(X = 0) \leq 0.1$; $X \sim Poi(2t)$

$\Rightarrow e^{-2t} \leq 0.1 \Rightarrow -2t \leq \ln(0.1)$

$\Rightarrow t \geq \frac{1}{2}\ln(10)$

≥ 1.15 [año]

Problema 2

Una conocida marca de comida rápida dispone de cinco sucursales para atender a sus clientes. Cada una de las sucursales funciona durante las 24 horas del día. Suponga que el número de clientes que llega a cada sucursal sigue una distribución de Poisson con una llegada promedio de 2 clientes por minuto. Suponga además que las afluencias de clientes en las 5 sucursales son independientes.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que en un periodo de 1 minuto, no llegue ningún cliente a la primera sucursal?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que en un periodo de 1 minuto, en cuatro de las cinco sucursales no llegue ningún cliente?
3. Escriba una expresión para la probabilidad de que en un periodo de 1 minuto, todas las sucursales reciban el mismo número de clientes.
4. En la primera sucursal, el tiempo de espera de un cliente sigue una distribución Normal con una media de 5 minutos y una desviación estándar de 2 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente espere más de 6 minutos en la primera sucursal?

1. R: $\mathbb{P}$("en 1 minuto, no llegue cliente a la sucursal 1")

X: "La cantidad de clientes en 1 minuto."

R: $\mathbb{P}(X=0)$; $X \sim Poi(2)$

$$\mathbb{P}(X=0) = dPois(0,2) \approx 0.13$$

2. ¿Cuál es la probabilidad de que en un periodo de 1 minuto, en cuatro de las cinco sucursales no llegue ningún cliente?

R: $\mathbb{P}$('en 4 de las 5 sucursales no llegue nadie en 1 min') ✓

Y: 'Cantidad de sucursales en que no llegan clientes en 1 minuto' ✓ ; $Y \sim Bin(5, 0.13)$ ✓

$$\mathbb{P}(Y=4) = dbinom(4,5,0.13) = 0.0012 \checkmark$$

$$= \binom{5}{4}(0.13)^4 (1-0.13)^{5-4}$$

3. Escriba una expresión para la probabilidad de que en un periodo de 1 minuto, todas las sucursales reciban el mismo número de clientes.

R: $\mathbb{P}$('Todas las sucursales reciban el mismo n° de clientes en 1 min')

K clientes

$\mathbb{P}$(1 suc reciba K clientes en 1 min y ... y 5 suc reciba K clientes)

X_i: "número de clientes que recibe la sucursal i-ésima en 1 min"

$$\mathbb{P}(X_1 = K \wedge X_2 = K \wedge \ldots \wedge X_5 = K)$$

$$= \mathbb{P}(X_1 = K) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_5 = K)$$

$X_i \sim Poi(2)$

$$= \prod_{i=1}^{5} \mathbb{P}(X_i = K)$$

$$= \prod_{i=1}^{5} \frac{2^K}{K!} e^{-2} = \left\{ \frac{2^K}{K!} e^{-2} \right\}^5$$

4. En la primera sucursal, el tiempo de espera de un cliente sigue una distribución Normal con una media de 5 minutos y una desviación estándar de 2 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente espere más de 6 minutos en la primera sucursal?

R: $\mathbb{P}$('cliente espere más de 6 min')

X: minutos que espera un cliente

$X \sim N(5, 2^2)$

$\mathbb{P}(X > 6) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 6)$

$= 1 -$ pnorm$(6, 5, 2)$

$\approx 0{,}30$