Variables aleatorias

Es una función cuyo dominio son eventos y su recorrido es subconjunto de $\mathbb{R}$

Lanzar una moneda

- Exp. Lanzar una moneda
- $\Omega := \{ \text{'Cara'}, \text{'Sello'} \}$

defino $X(\text{'Cara'}) = 1$

$X(\text{'Sello'}) = 0$

¿X es una Variable aleatoria?

Si

- $X : \Omega \mapsto \{0,1\}$
- $X : \{\text{'cara'}; \text{'sello'}\} \mapsto \{0,1\}$

Sea X el número de lapices rojos que extraigo al sacar 4 lapices de un estuche que tiene 3 lapices rojos y 4 azules.

$$\mathrm{Rec}(X) := \{0, 1, 2, 3\}$$

¿Cúal es el valor esperado de lapices rojos?

$$E[X] = \int_{\mathrm{Dom}(X)} x \, d\mathbb{P}$$

Discreta: $\mathrm{Rec}(X) \subseteq \mathbb{Z}$

Continua: $\mathrm{Rec}(X) \subseteq \mathbb{R}$ $\wedge$ $\mathrm{Rec}(X) \subseteq \bigcup_{\alpha} [a,b]$

Caso discreto.

$$E[X] = \sum_{\mathrm{Rec}(X)} x \cdot \mathbb{P}(X=x)$$

$$= 0 \cdot \mathbb{P}(X=0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X=1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X=2) + 3 \cdot \mathbb{P}(X=3)$$

Continuo

$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

↳ función de dist. o prob. acumulada.

$$\lim_{x \mapsto \infty} F(x) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \underbrace{f_X(y)}_{\text{densidad de probabilidad}} dy$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\, dy$$

$$F'(x) = f_X(x)$$

$$d\mathbb{P} = f_X(y)\, dy$$

Problema 1

Considere:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2/5, & 0 \le x \le 1 \\ (-x^2+6x-4)/5, & 1 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

1. Determine la función de densidad de X.
2. Calcule las probabilidades:
   - $P(X \le 2)$
   - $P(1 < X \le 2)$
   - $P(X > \frac{1}{2})$
3. Calcule $\mathbb{E}[X]$

Sol:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2/5, & 0 \le x \le 1 \\ (-x^2+6x-4)/5, & 1 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

$$f_X(x) := \begin{cases} 0 & ; x<0 \\ \frac{2}{5}x & ; 0 \le x \le 1 \\ -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5} & ; 1 < x \le 3 \\ 0 & ; X > 3 \end{cases}$$

2

$$\mathbb{P}(X \le 2) = \int_{-\infty}^{2} f_X(y)\,dy$$

$$= \int_0^2 f_X(y)\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{5}y\,dy + \int_1^2 -\frac{2}{5}y + \frac{6}{5}\,dy$$

$$= 0.8$$

$\mathbb{P}(X<1) = \mathbb{P}(X \le 1)$; X continua

$$\mathbb{P}(X > 1/2) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X \le 1/2)$$

$$= 1 - \int_0^{1/2} \frac{2}{5}y\,dy$$

$$= 1 - 0.05$$

$$= 0{,}95$$

$$\mathbb{P}(1 < X \le 2) =$$

$$= \mathbb{P}(X \le 2) - \mathbb{P}(X < 1)$$

$$= 0.8 - \int_0^1 \frac{2y}{5}\,dy$$

$$= 0.8 - 0.2$$

$$= 0.6 \quad //$$

$$f_X(x) := \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{2}{5}x & ; 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5} & ; 1 < x \leq 3 \\ 0 & ; x > 3 \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$$

$$= \int_0^3 x\, f_X(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 x \cdot \frac{2}{5}x + \int_1^3 x\left(-\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}\right) dx$$

$$= 1{,}4\overline{6}$$

Problema 4

El tiempo total, medido en unidades de 100 horas, que un adolescente escucha su estéreo durante un año en una variable aleatoria, cuya modelación está dada por la siguiente función:

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{\left(\frac{\lambda}{1-k}\right)x} I_{]0,\infty[}(x) \quad \lambda > 0$$

1. Demuestre que $f_X(x)$ es función de densidad de probabilidad sí y sólo si $k = 1 + \lambda^2$.
2. Considerando $\lambda = 4$, encuentre la probabilidad de que el tiempo total en horas, que un adolescente escucha su estéreo durante un año sea entre 3 y 8 unidades.

1. $\mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx$

$f_X(x)$ es densidad de Prob. si $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

y $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

Sol: $f_X(x) = \frac{1}{\lambda} \cdot \exp\left[\frac{\lambda}{1-K} \cdot x\right] I_{(0,+\infty)}(x) \geq 0$

$$\boxed{\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 \,; & x \in A \\ 0 \,; & x \notin A \end{cases}}$$

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot \exp\left(\frac{\lambda}{1-K} \cdot x\right) I_{(0,+\infty)}\,dx = 1$

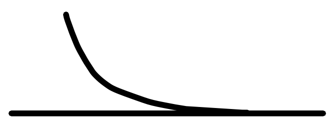
$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} \int_{0}^{+\infty} \exp\left(\frac{\lambda}{1-K} \cdot x\right) dx = 1$

$\Rightarrow \lim_{b \mapsto +\infty} \int_0^b e^{\alpha x}\,dx = \lambda \,; \quad \alpha = \frac{\lambda}{1-K}$

$\Rightarrow \lim_{b \mapsto +\infty} \left.\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right|_0^b = \lambda$

$\Rightarrow \lim_{b \to +\infty} \frac{e^{\alpha b}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} = \lambda$

$\Rightarrow \lim_{b \mapsto +\infty} \frac{e^{\alpha b} - 1}{\alpha} = \lambda$



$\Rightarrow \lim_{b \mapsto +\infty} \frac{e^{\frac{\lambda}{1-K} \cdot b} - 1}{\frac{\lambda}{1-K}} = \lambda$

$; \quad 1 - K < 0$

$\Rightarrow \frac{-1}{\frac{\lambda}{1-K}} = \lambda$

$\Rightarrow -1 = \frac{\lambda^2}{1-K}$

$\Rightarrow K - 1 = \lambda^2$

$\Rightarrow K = \lambda^2 + 1$ //

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{\left(\frac{\lambda}{1-k}\right)x} I_{]0,\infty[}(x) \quad \lambda > 0$$

$= \frac{1}{\lambda} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x) \,; \lambda > 0$

2. $\mathbb{P}(3 < X < 8) \,; \lambda = 4$

$= \int_3^8 \frac{1}{4} \cdot e^{-x/4}\,dx$

$\approx 0{,}33$

Problema 2

Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \mathrm{Unif}(0,1)$

1. Encuentre la función de distribución acumulada y la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria $Y = X^2$
2. Encuentre la esperanza y la varianza de la variable aleatoria Y

$X \sim \mathrm{Unif}(a,b) \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{1}{b-a}$; $F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{b-a} = \frac{x}{b-a}$

$Y = X^2$; $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$

$= \mathbb{P}(X^2 \leq y)$

$= \mathbb{P}(\sqrt{X^2} \leq \sqrt{y})$

$= \mathbb{P}(|X| \leq \sqrt{y})$

$= \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$

$= \mathbb{P}(X \leq \sqrt{y}) - \underbrace{\mathbb{P}(X \leq -\sqrt{y})}_{0}$

$= \mathbb{P}(X \leq \sqrt{y})$

$= F_X(\sqrt{y})$

$$= \begin{cases} \sqrt{y} & ; \ y \in [0,1) \\ 0 & y < 0 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & y \in (0,1) \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_0^1 y \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy = 1/3$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= E[X^2] - 1/9$$

$$E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_X(x) dx$$

$$E[Y^2] = \int_0^1 Y^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy = \frac{1}{5}$$

$$Var(Y) = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = 4/45$$