2. Sean $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ mutuamente excluyentes, y sea $B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$. Suponga que $\mathbb{P}(B_j) > 0$ y $\mathbb{P}(A \mid B_j) = p$ para $j = 1, 2, 3, \ldots, n$. Calcule $\mathbb{P}(A \mid B)$

$$B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n = \emptyset$$

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad ;$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_n))}{\sum \mathbb{P}(B_i)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}((A \cap B_1) \cup \ldots \cup (A \cap B_n))}{\sum \mathbb{P}(B_i)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_i)}{\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_i)} = p$$

$$\mathbb{P}(A \mid B_i) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_i)}{\mathbb{P}(B_i)} \quad \Big| \quad \mathbb{P}(B_i) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_i)}{p}$$

5. Obtener la probabilidad p de que al lanzar n veces dos dados se obtenga al menos un 6 doble.
// ¿Cuantas partidas habrá que jugar para que tengamos $p = 1/2$ de obtener un 6 doble?

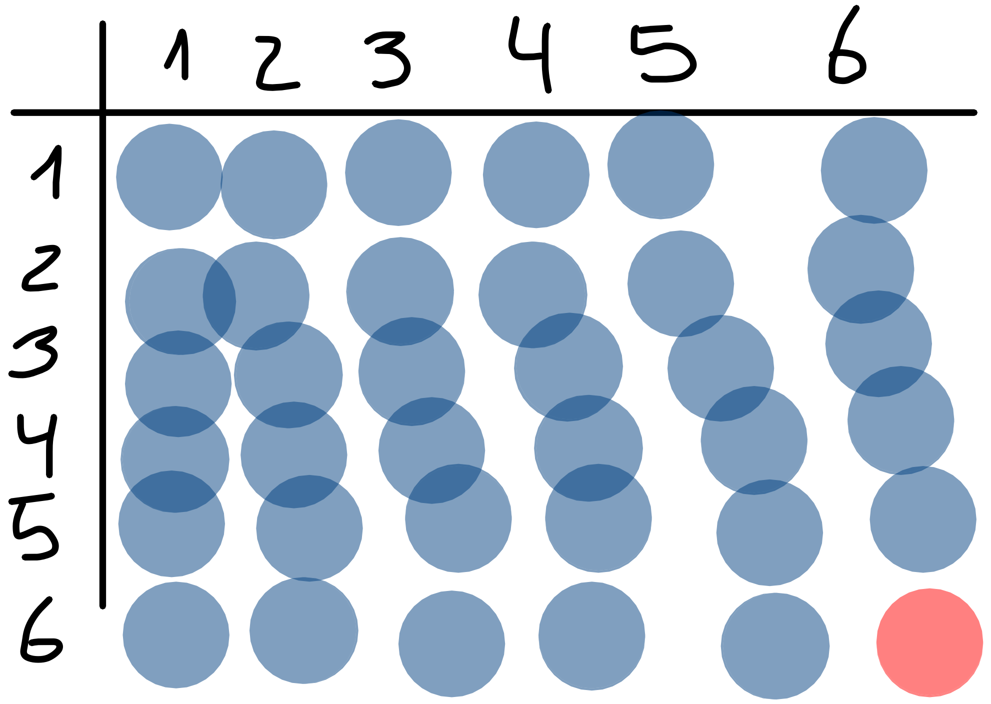
A: al lanzar n veces dos dados se obtenga al menos un 6 doble

A^c: al lanzar n veces dos dados no salga un 6 doble.

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$$

A_i^c := el i esimo lanzamiento no sale un 6 doble.

$$\mathbb{P}(A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i^c)$$



$$\mathbb{P}(A_i^c) = \frac{35}{36} \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) = \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

$$\therefore A^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \Rightarrow \mathbb{P}(A^c) = \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n = p$$

$$\frac{1}{2} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

$$\left(\frac{35}{36}\right)^n = \frac{1}{2}$$

$$n = \frac{\log(1/2)}{\log(35/36)}$$

$$= 24,60$$

$$\approx 25$$

$\log = \ln$

1. La prevalencia de la diabetes es del 4%. La glucemia basal diagnostica correctamente el 95% de los diabéticos, pero da un 2% de falsos positivos. Diagnosticada una persona ¿Cuál es la probabilidad de que realmente sea diabética?

TesT

$\mathbb{P}(A) = 0,04$

A: Tiene diabetes

A^c: No tiene diabetes

T: Test sale positivo

T^c: Test sale negativo.

$\mathbb{P}(T \mid A) = 0,95$;

$\mathbb{P}(T \mid A^c) = 0,02$;

$\mathbb{P}(T \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(T/A)$

$$\mathbb{P}(A \mid T) = \frac{\mathbb{P}(A \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(T \mid A)}{\mathbb{P}(T)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(T \mid A)}{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(T \mid A) + \mathbb{P}(A^c)\cdot\mathbb{P}(T \mid A^c)}$$

$\mathbb{P}(A \mid T)$

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T \cap A) + \mathbb{P}(T \cap A^c)$$
$$= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(T \mid A) + \mathbb{P}(A^c)\cdot\mathbb{P}(T \mid A^c)$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cup \emptyset) = \mathbb{P}(A \cup (B \cap B^c)) =$$
$$= \mathbb{P}((A \cup B) \cap (A \cup B^c)) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cup B^c) -$$
$$- \mathbb{P}(A \cup B \cup A \cup B^c)$$
$$= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cup B^c) - 1$$
$$= \mathbb{P}(A) + \cancel{\mathbb{P}(B)} - \mathbb{P}(A \cap B) +$$
$$+ \mathbb{P}(A) + \cancel{\mathbb{P}(B^c)} - \mathbb{P}(A \cap B^c) - \cancel{1}$$
$$= 2\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B^c)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \qquad \mathbb{P}(A \mid B^c) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B^c)}{\mathbb{P}(B^c)}$$

$$\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(B^c)\cdot\mathbb{P}(A \mid B^c) = \mathbb{P}(A)$$