Fabián Ramírez Díaz

Problema 1

La prueba de Papanicolau (PAP) es un procedimiento usado para la detección de cáncer cervicouterino. Para mujeres que padecen este cáncer, existe un 16% de falso negativo, mientras que para mujeres sanas, existe un 10% de falso positivo. Defina los eventos:

T: el test PAP es positivo. T^c: el test PAP es negativo.

y sea:

C: la mujer examinada tiene cáncer cervicouterino.

La información disponible se puede escribir como:

$$\mathbb{P}(T^c \mid C) = 0{,}16, \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(T \mid C^c) = 0{,}10$$

En Chile, existe 6 por cada 100 000 mujeres (datos obtenidos por el MINSAL) que padecen este cáncer. Es decir,

$$\mathbb{P}(C) = \frac{6}{100000} = 0{,}00006$$

Para una mujer que se somete a un examen. Obtenga

1. La probabilidad de obtener un PAP positivo.
2. La probabilidad de tener cáncer dado que el test PAP resultó positivo.

1. $\mathbb{P}(\text{'tener un test posivito'}) =$

$= \mathbb{P}(T)$

Obs: $\mathbb{P}(T^c \mid C) = 0{,}16$

$\mathbb{P}(T \mid C^c) = 0{,}10$

$\mathbb{P}(C) = 0{,}00006$

Nota: $1 - \mathbb{P}(T^c \mid C) = 0{,}84 = \mathbb{P}(T \mid C)$

$1 - \mathbb{P}(T \mid C^c) = 0{,}9 = \mathbb{P}(T^c \mid C^c)$

$\mathbb{P}(C^c) = 1 - \mathbb{P}(C) = 0{,}99994$

Recuerdo:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(B \mid A_i)$$

Donde $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

$=$ 'Eventos posibles condicional'

Por Teorema de la Prob. Total.

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(T \mid C) + \mathbb{P}(C^c) \cdot \mathbb{P}(T \mid C^c)$$

$$P(T) = 0{,}00006 \cdot 0{,}84 + 0{,}99994 \cdot 0{,}10$$

$$= 0{,}1000444$$

2. $$\mathbb{P}(C \mid T) = \frac{\mathbb{P}(C \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(T \cap C)}{\mathbb{P}(T)}$$

$$\mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(T \mid C) = \mathbb{P}(T \cap C)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(T \mid C)}{\mathbb{P}(T)}$$

$$= \frac{0{,}00006 \cdot 0.84}{0{,}1000444} = 0{,}000504 \;//$$

Problema 3

Una urna contiene 5 dados con sus caras de color blanco o rojo. El dado i-ésimo $(i = 1,\dots,5)$ tiene i de sus caras blancas y el resto rojas. Se selecciona al azar un dado de la urna y se lanza.

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una cara roja?
2. Dado que la cara obtenida fue roja, ¿cuál es la probabilidad de que el dado seleccionado sea el i-ésimo?

(a) $\mathbb{P}($'obtener una cara roja'$)$

A_i : Seleccionar el dado i-ésimo. ; $i=1,\dots,5$

B : La cara obtenida es roja

$\mathbb{P}(B) \leftarrow$ Meta

Nota que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$ = 'Sacar un dado'

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i) \leftarrow \text{Teo Prob Total}$$

$$= \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

$\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{5}$; $\mathbb{P}(B|A_i) = \frac{\#\text{ Caras Rojas}}{\#\text{ Caras totales}} = \frac{6-i}{6}$

$$\therefore \mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{5} \left(\frac{6-i}{6}\right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30}\{5+4+3+2+1\} = \frac{15}{30} = 0.5$$

(b) $\mathbb{P}(A_i|B) =$

$$= \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}(A_i \cap B) = \mathbb{P}(B \cap A_i) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(B|A_i)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$= \frac{\left(\frac{6-i}{6}\right) \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{6-i}{15}$$

Problema 4

Un jugador tira un dado, le sale 6 y gana. Hallar la probabilidad de que haya hecho trampa sabiendo que:

1. El 50% de los jugadores son tramposos.
2. El $p \times 100\%$ de los jugadores son tramposos, $0 < p < 1$.

1. T : El jugador hace trampa.

g : El jugador gana.

$$\mathbb{P}(T) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(T^c)$$

$$\mathbb{P}(g \mid T^c) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(g \mid T) = 1$$

$$\mathbb{P}(T \mid g) = \frac{\mathbb{P}(T \cap g)}{\mathbb{P}(g)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(g \mid T) \cdot \mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(g)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(g \mid T) \cdot \mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(g \mid T) \cdot \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(g \mid T^c) \cdot \mathbb{P}(T^c)}$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{6}{7} \,//$$

2. $\mathbb{P}(T) = p$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(T \mid g) = \frac{1 \cdot p}{p + \frac{1}{6}(1-p)} = \frac{6p}{1+5p} \,//$$