Ayudantía 11

viernes, 4 de diciembre de 2020 12:12

1. (35 puntos) La variable aleatoria X tiene una distribución lognormal, si $Y = \ln(X) \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, es decir, si la densidad de X está dada por,

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x)-\mu)^2}, \quad x > 0$$

cuya notación es $X \sim \text{lognormal}\,(\mu, \sigma^2)$. Esta distribución se suele utilizar para modelar datos extremos. En base a una muestra aleatoria de tamaño n de dicha distribución:
(a) Obtenga los estimadores de máxima verosimilitud de μ y σ^2 y analice sus propiedades de insesgamiento y consistencia. En caso que los estimadores no sean insesgado proponga un estimador insesgado con la misma eficiencia que el estimador máximo verosimil correspondiente.
(b) Determine una expresión que permita estimar μ mediante un intervalo del $\gamma\%$ de confianza.
(c) Suponga que se dispone de la siguiente información:

$$\sum_{i=1}^{10} \ln^2(x_i) = 88.13; \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{10} \ln(x_i) = 29.62$$

i. Evalué los estimadores encontrado en (a) y el intervalo encontrado en (b)
ii. Usando esta información obtenga un valor estimado para $\mathbb{E}[X]$y$\mathbb{V}[X]$. Hint: Utilice la función generadora de momentos de una distribución normal

(a) Sea X1,...,Xn una muestra aleatoria de tamaño n desde X. Luego:

$$l(\mu, \sigma^2) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\log(x_i) - \mu\right)^2$$

Entonces tenemos que:

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2\sigma^2}\cdot 2\left(\log(X_i - \mu)\right)\cdot(-1) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \log(X_i) - \mu = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\mu}_{MV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(X_i)$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\left(\log(X_i) - \mu\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2_{MV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\log(x_i) - \hat{\mu}_{MV}\right)^2$$

Estudiemos las propiedades de los estimadores:

$$E[\hat{\mu}_{MV}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[\log(X_i)] = \mu$$

$$E[\hat{\sigma}^2_{MV}] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log^2(X_i) - \hat{\mu}^2_{MV}\right]$$

$$= \frac{1}{}\sum^{n} E[\log^2(X_i)] - E[\hat{\mu}^2_{MV}]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[\log^2(X_i)] - E[\hat{\mu}_{MV}^2]$$

Notemos que:

- $\log(X_i) = Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$
- $E[\log(X_i)] = \mu \;;\; Var[\log(X_i)] = \sigma^2$
- $E[\log^2(X_i)] = \sigma^2 + \mu^2$
- $\hat{\mu}_{MV} \sim N(\mu, \sigma^2/n) \Rightarrow E[\hat{\mu}_{MV}^2] = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}$

Luego:

$$E[\hat{\sigma}_{MV}^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{\sigma^2+\mu^2\} - \left\{\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}\right\}$$

$$= \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 - \sigma^2/n$$

$$= \sigma^2(1 - 1/n)$$

$$= \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

Proponemos como estimador insesgado a:

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_{MV}^2 \cdot \frac{n}{n-1}$$

(b) Nota que:

$$\frac{\hat{\mu}_{MV} - \mu}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

$$\Rightarrow IC_{\gamma}(\mu) = \left[\hat{\mu}_{MV} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \cdot \left|t\left(\tfrac{1-\gamma}{2}, n-1\right)\right|,\ \hat{\mu}_{MV} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\left|t\left(\tfrac{1-\gamma}{2}, n-1\right)\right|\right]$$

(c) Notar que:

$$\hat{\mu}_{MV} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(X_i) = \frac{1}{10}\cdot 29.62 = 2.962$$

$$\hat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{10}{10-1}\cdot\left\{\frac{1}{10}\sum \log^2 X_i - \hat{\mu}_{MV}^2\right\} = \frac{10}{9}\left\{\frac{1}{10}\cdot 88.13 - (2.962)^2\right\}$$

$$\hat{\sigma}^2_{MV} = \frac{10}{10-1} \cdot \left\{ \frac{1}{10} \sum \log^2 x_i - \hat{\mu}^2_{MV} \right\} = \frac{10}{9} \left\{ \frac{1}{10} \cdot 88.13 - (2.962)^2 \right\}$$

$$= 117.36284$$

$$\therefore \hat{\sigma} = 10.83$$

$$\Rightarrow IC_\gamma(\mu) = 2.962 \pm 3.42 \cdot \left| t\left(\tfrac{1-\gamma}{2}, 9\right) \right|$$

Además:

$$M_Y(t) = E[e^{tY}] = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$\Rightarrow E[X] = E[e^{\log(X)}] = M_Y(1) = e^{\mu + \sigma^2/2}$$

$$E[X^2] = E[e^{2\log X}] = M_Y(2) = e^{2\mu + 2\sigma^2}$$