Ayudantía 10

viernes, 4 de diciembre de 2020 12:12

[50 pts.] Sea X una variable aleatoria discreta con función de cuantía dada por

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{2\theta}{3}; \quad \mathbb{P}(X=1)=\frac{\theta}{3}; \quad \mathbb{P}(X=2)=\frac{(1-\theta)}{3}; \quad \mathbb{P}(X=3)=\frac{2(1-\theta)}{3}$$

donde $0 \leq \theta \leq 1$ es un parámetro.
(a) Para un muestra de tamaño n desde tal distribución, es decir $X_1, \ldots, X_n$, hallar el estimador de momentos de θ. ¿Es inscsgado? ¿Es consistente en media cuadrática?
(b) Para la siguiente muestra aleatoria (de tamaño $n=10$)

$$3,0,2,1,3,2,1,0,2,1$$

desde tal distribución. Hallar el estimador máximo verosimil de θ.

Solución:

(a) estimador de momentos es aquel que resuelve la ecuación esperanza de X igual al primer momento muestral es decir el promedio.

$$E[X] = \bar{X} \quad (1)$$

Necesito calcular la esperanza de la variable aleatoria.

$$E[X] = 0\cdot\frac{2\theta}{3} + 1\cdot\frac{\theta}{3} + 2\cdot\frac{(1-\theta)}{3} + 3\cdot\frac{2(1-\theta)}{3}$$

$$= \frac{\theta}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2\theta}{3} + \frac{6}{3} - \frac{6\theta}{3}$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{7\theta}{3}$$

Reemplazando en (1) tenemos que:

$$\frac{8}{3} - \frac{7\theta}{3} = \bar{x} \Rightarrow -\frac{7}{3}\cdot\theta = \bar{x} - \frac{8}{3} \Rightarrow \hat{\theta}_{MM} = -\frac{3}{7}\left(\bar{X} - \frac{8}{3}\right) //$$

Necesitamos chequear si el estimador es insesgado.

$$E[\hat{\theta}_{MM}] = E\left[-\frac{3}{7}\left(\bar{X} - \frac{8}{3}\right)\right] = -\frac{3}{7}\left(E[\bar{X}] - \frac{8}{3}\right)$$

Necesito calcular la esperanza del promedio. Entonces:

$$E[\bar{X}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{8}{3} - \frac{7\theta}{3} = \frac{8}{3} - \frac{7\theta}{3}$$

Reemplazando todo:

$$E[\hat{\theta}_{MM}] = -\frac{3}{7}\left(\frac{8}{3} - \frac{7\theta}{3} - \frac{8}{3}\right) = \theta$$

$\therefore$ $\hat{\theta}_{MM}$ es insesgado!

Necesito revisar si mi estimador es consistente en media cuadrática.

$$ECM(X) = Var(X) - B^2(X)$$

↳ Sesgo: $E[\hat{\theta}] - \theta$

Un estimador es consistente en media cuadrática si el límite cuando n tiende a infinito de la función de error cuadrático medio tiende a cero en otras palabras tenemos que checar que:

$$ECM(\hat{\theta}_{MM}) = Var(\hat{\theta}_{MM})$$

$$= Var\left\{ \frac{8}{7} - \frac{3\bar{X}}{7} \right\}$$

$$= Var\left\{ -\frac{3}{7}\bar{X} \right\}$$

$$= \frac{9}{49} Var(\bar{X})$$

$$= \frac{9}{49} \cdot Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \right)$$

$$= \frac{9}{49n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

Resta calcular la varianza de Xi

$$Var(X_i) = E[X_i^2] - (E[X_i])^2$$

$$= E[X_i^2] - \left(\frac{8}{3} - \frac{7\theta}{3} \right)^2$$

$$= 0^2 \cdot \frac{2\theta}{3} + 1^2 \cdot \frac{\theta}{3} + 2^2 \cdot \frac{(1-\theta)}{3} + 3^2 \cdot \frac{(1-\theta)}{3} - \left(\frac{8}{3} - \frac{7\theta}{3} \right)^2$$

$$= g(\theta)$$

Luego:

$$ECM(\hat{\theta}) = \frac{9}{49n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} g(\theta) = \frac{9g(\theta)}{49n}$$

Notemos que ECM tiende a 0 cuando n tiende a infinito por lo tanto el estimador de momentos de theta es consistente en media cuadrática.

(b) notemos que para estimar teta por máxima verosimilitud necesitamos la función de densidad de esta variable aleatoria la cual sabemos que viene dado por en este caso como es discreta la suma desde igual 1 hasta desde igual cero en este caso hasta XD la suma de las funciones de densidad y como tenemos una muestra aleatoria vamos a aprovecharnos de la independencia que tienen estas variables.

$$L(\theta) = \prod^{n}$$

1 hasta desde igual cero en este caso hasta XD la suma de las funciones de densidad y como tenemos una muestra aleatoria vamos a aprovecharnos de la independencia que tienen estas variables.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i) = \mathbb{P}(X_i = 3)\cdot\mathbb{P}(X_i = 0)\cdot\mathbb{P}(X_i = 2)\cdot\ldots$$

$$= \left(\frac{2(1-\theta)}{3}\right)^2 \left(\frac{2\theta}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{(1-\theta)}{3}\right)^3 \left(\frac{\theta}{3}\right)^3$$

$$l(\theta) = 2\cdot\log\left(\frac{2}{3}(1-\theta)\right) + 2\log\left(\frac{2}{3}\cdot\theta\right) + 3\log\left(\frac{1}{3}\cdot(1-\theta)\right) + 3\log\left(\frac{1}{3}\cdot\theta\right)$$

$$= 2\log\left(\frac{2}{3}\right) + 2\log(1-\theta) + 2\log\left(\frac{2}{3}\right) + 2\log(\theta) +$$
$$+ 3\log\left(\frac{1}{3}\right) + 3\log(1-\theta) + 3\log(1/3) + 3\log(\theta)$$

$$l'(\theta) = 5\cdot\frac{1}{1-\theta}(-1) + 5\cdot\frac{1}{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow -\theta + (1-\theta) = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{MV} = 0.5$$

[50 pts.] Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria desde la función de densidad

$$f(x) = kx^2 e^{-x^2/\theta}, \quad x > 0, \quad \theta > 0$$

(a) Encontrar el valor de k.
(b) Hallar el estimador máximo verosimil de θ. ¿. Es insesgado?

Solución:

(a) Para encontrar el k lo que tengo que hacer es integrar la función de densidad de probabilidad desde menos infinito hasta más infinito esa integral tiene quedar 1 tenemos que fijarnos también en el dominio de la función en este caso no está variable x va desde cero hasta más infinito por lo tanto la integral que tengo que calcular va a ir desde cero hasta más infinito de esa función de densidad y esa tiene que integrar 1.

$$\int_0^{\infty} kx^2 e^{-x^2/\theta} dx = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\theta^{3/2} k$$

$$\Rightarrow K \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\cdot\theta^{3/2} = 1$$

$$\Rightarrow K = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot\theta^{-3/2}$$

(b) Notemos que la verosilimilitud viene dada por:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot\theta^{-3/2}\cdot x_i^2\cdot\exp\left(-\frac{x_i^2}{\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \ell(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\right) - \frac{3}{2}\log(\theta) + \log\left(X_i^2\right) - \frac{X_i^2}{\theta}$$

$$\Rightarrow \ell'(\theta) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} X_i^2 = 0 \quad ; \quad \overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum X_i^2$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{3n}{2}\cdot\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\cdot n\overline{X^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -3\cdot\theta + 2\overline{X^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{\theta}_{MV} = \frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

para demostrar que mi estimadores insesgado tengo que demostrar que la esperanza de mi estimador es igual al parámetro

$$E[\hat{\theta}] = \frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i^2]$$

$$E[X_i^2] = \int_0^{\infty} x^2\cdot\frac{4}{\sqrt{\pi}\,\theta^{3/2}}\cdot x^2 \exp(-x^2/\theta)\, dx$$

$$= \frac{3}{2}\theta$$

$$\therefore E[\hat{\theta}] = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}\cdot n\cdot\frac{3}{2}\theta = \theta$$

Es insesgado!

Construcción de un intervalo de confianza para la media

Sea $X_1,\dots,X_n$ una m.a. (n) desde $N(\mu,\sigma^2)$

- σ conocido:

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1) \Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in \left[Z\left(\tfrac{1-\gamma}{2}\right), Z\left(\tfrac{1+\gamma}{2}\right)\right]\right) = \gamma$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) < \mu < \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z\left(\frac{1-\gamma}{2}\right) \right) = \gamma$$