MAT-468: Sesión 7, Estimación en modelos lineales generalizados

Felipe Osorio

http://fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM

Definición 1 (familia exponencial)

Sea Y una variable aleatoria con densidad

$$f(y;\theta,\phi) = \exp[\phi\{y\theta - b(\theta)\} + c(y,\phi)],$$

donde

$$\mathsf{E}(Y) = \mu = b'(\theta), \qquad \operatorname{var}(Y) = \phi^{-1}V(\mu),$$

con $V(\mu) = \mathsf{d}\,\mu/\,\mathsf{d}\,\theta = b''(\theta)$ la función de varianza y $\phi^{-1} > 0$ el parámetro de dispersión. En este caso anotamos $Y \sim \mathsf{FE}(\theta,\phi)$.

Definición 2 (modelo lineal generalizado)

Considere $Y_1, \dots, Y_n$ variables aleatorias independientes. Un modelo lineal generalizado (GLM) se define como:

$$Y_i \sim \mathsf{FE}(\theta_i, \phi), \qquad i = 1, \dots, n,$$

donde la media μ_i está relacionada con el predictor lineal $\eta_i = \boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$, mediante la función de enlace g, como

$$g(\mu_i) = \eta_i,$$

para g una función monótona y diferenciable.

Distribución normal

Considere $Y \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$. De este modo, tenemos la función de densidad

$$\begin{aligned} f(y;\mu,\sigma^2) &= (2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2\Big\} \\ &= \exp\Big[\Big\{\frac{1}{\sigma^2}\Big(y\mu - \frac{\mu^2}{2}\Big) - \frac{1}{2}\Big\{\log(2\pi\sigma^2) + \frac{y^2}{\sigma^2}\Big\}\Big], \end{aligned}$$

es decir, $\theta = \mu$, $b(\theta) = \theta^2/2$, $\phi = \sigma^{-2}$ y $c(y,\phi) = \frac{1}{2}\log(\phi/2\pi) - \frac{\phi y^2}{2}$.

Distribución Poisson

En el caso que $Y \sim \mathsf{Poi}(\mu)$, tenemos la función de probabilidades,

$$p(y;\mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^y}{y!} = \exp(y\log\mu - \mu - \log y!),$$

así, basta considerar $\log\mu = \theta$, $b(\theta) = e^\theta$, $\phi = 1$ y $c(y,\phi) = -\log y!$ para notar que $\mathsf{Poi}(\mu)$ pertenece a la familia exponencial.

Función de log-verosimulitud

Para $Y_1, \dots, Y_n$ siguiendo un GLM tenemos que

$$\begin{aligned}
\ell(\boldsymbol{\psi}) &= \sum_{i=1}^{n} \log f(y_i; \theta_i, \phi) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{\phi(y_i\theta_i - b(\theta_i)) + c(y_i; \phi)\} \\
&= \phi \sum_{i=1}^{n} (y_i\theta_i - b(\theta_i)) + \sum_{i=1}^{n} c(y_i; \phi),
\end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \phi)^\top$.

Observación:

Debemos destacar que $\boldsymbol{\beta}$ y ϕ son parametros ortogonales, y por tanto la inferencia puede ser realizada de manera independiente.

Función score

Para GLM la función score $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\beta}) = \dot{\ell}(\boldsymbol{\beta})$ adopta la forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= \phi \sum_{i=1}^{n} \Big\{ Y_i \frac{\mathsf{d}\,\theta_i}{\mathsf{d}\,\mu_i} \frac{\mathsf{d}\,\mu_i}{\mathsf{d}\,\eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \boldsymbol{\beta}} - \frac{\mathsf{d}\,b(\theta_i)}{\mathsf{d}\,\theta_i} \frac{\mathsf{d}\,\theta_i}{\mathsf{d}\,\mu_i} \frac{\mathsf{d}\,\mu_i}{\mathsf{d}\,\eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \boldsymbol{\beta}} \Big\} \\
&= \phi \sum_{i=1}^{n} \Big\{ Y_i - \frac{\mathsf{d}\,b(\theta_i)}{\mathsf{d}\,\theta_i} \Big\} \frac{\mathsf{d}\,\theta_i}{\mathsf{d}\,\mu_i} \frac{\mathsf{d}\,\mu_i}{\mathsf{d}\,\eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \boldsymbol{\beta}} \\
&= \phi \sum_{i=1}^{n} (Y_i - b'(\theta_i)) \Big\{ \frac{\mathsf{d}\,\mu_i}{\mathsf{d}\,\theta_i} \Big\}^{-1} \frac{\mathsf{d}\,\mu_i}{\mathsf{d}\,\eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \boldsymbol{\beta}} \\
&= \phi \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \mu_i) V(\mu_i)^{-1} \frac{\mathsf{d}\,\mu_i}{\mathsf{d}\,\eta_i} \boldsymbol{x}_i \\
&= \phi \sum_{i=1}^{n} \omega_i^{1/2} \frac{(Y_i - \mu_i)}{\sqrt{V_i}} \boldsymbol{x}_i,
\end{aligned}
$$

donde $\omega_i = (\mathsf{d}\,\mu_i / \mathsf{d}\,\eta_i)^2 / V_i$ y $V_i = V(\mu_i)$, para $i = 1, \ldots, n$.

Función score

Una manera mucho más compacta de escribir la función score en GLM es:

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\beta}) = \phi \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{1/2} \boldsymbol{V}^{-1/2}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}),$$

donde $\boldsymbol{W} = \operatorname{diag}(\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\boldsymbol{V} = \operatorname{diag}(V_1, \dots, V_n)$ y $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$.

Vamos a suponer que $\boldsymbol{X}$ es matriz de rango completo cuya i-ésima fila es dada por $\boldsymbol{x}_i^\top$, para $i = 1, \dots, n$. Además, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^\top$ con $\mu_i = \mu_i(\boldsymbol{\beta})$.

Matriz de información de Fisher

La matriz Hessiana en GLM es dada por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^\top} &= \phi \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_i) \frac{\mathsf{d}^2\, \theta_i}{\mathsf{d}\, \mu_i^2} \Big(\frac{\mathsf{d}\, \mu_i}{\mathsf{d}\, \eta_i}\Big)^2 \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^\top \\ &+ \phi \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_i) \frac{\mathsf{d}\, \theta_i}{\mathsf{d}\, \mu_i} \Big(\frac{\mathsf{d}^2\, \mu_i}{\mathsf{d}\, \eta_i^2}\Big)^2 \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^\top \\ &- \phi \sum_{i=1}^n \frac{\mathsf{d}\, \theta_i}{\mathsf{d}\, \mu_i} \Big(\frac{\mathsf{d}\, \mu_i}{\mathsf{d}\, \eta_i}\Big)^2 \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^\top\end{aligned}$$

De este modo, la matriz de información de Fisher asume la forma,

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\beta}) = \mathsf{E}\Big\{ -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\psi})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^\top} \Big\} = \phi \sum_{i=1}^n \frac{(\mathsf{d}\, \mu_i / \mathsf{d}\, \eta_i)^2}{V_i} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^\top = \phi \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W} \boldsymbol{X}.$$

Algoritmo Fisher-scoring en GLM

El algoritmo Fisher-scoring para $\boldsymbol{\beta}$ es dado por:

$$\boldsymbol{\beta}^{(r+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(r)} + \boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}(\boldsymbol{\beta}^{(r)})\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\beta}^{(r)}),$$

y para el caso de GLM, adopta la forma:

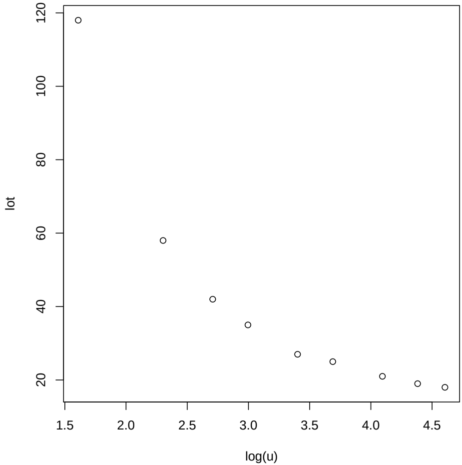
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}^{(r+1)} &= \boldsymbol{\beta}^{(r)} + (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{(r)}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top {\boldsymbol{W}^{(r)}}^{1/2} {\boldsymbol{V}^{(r)}}^{-1/2}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}^{(r)}) \\
&= (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{(r)}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{(r)}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}^{(r)} \\
&\quad + (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{(r)}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top {\boldsymbol{W}^{(r)}}^{1/2} {\boldsymbol{V}^{(r)}}^{-1/2}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}^{(r)}) \\
&= (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{(r)}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W}^{(r)}\boldsymbol{Z}^{(r)},
\end{aligned}$$

donde

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{W}^{-1/2}\boldsymbol{V}^{-1/2}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}),$$

denota la respuesta de trabajo.

Datos de coagulación



Datos de coagulación de la sangre (McCullagh y Nelder, 1989, pp. 300-2)

Conjunto de datos: Coagulación inducida por dos lotes de tromboplastina.

```
clotting <- data.frame(
+    u = c(5,10,15,20,30,40,60,80,100),
+    lot = c(118,58,42,35,27,25,21,19,18))
```

Exploramos el conjunto de datos por medio del gráfico:

```
> plot(lot ~ log(u), data = clotting)
```

Datos de coagulación de la sangre

```
> fit <- glm(lot ~ log(u), data = clotting, family = Gamma)
> summary(fit)

Call:
glm(formula = lot ~ log(u), family = Gamma, data = clotting)

Deviance Residuals:
     Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.04008  -0.03756  -0.02637   0.02905   0.08641

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.0165544  0.0009275  -17.85 4.28e-07 ***
log(u)       0.0153431  0.0004150   36.98 2.75e-09 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for Gamma family taken to be 0.002446059)

    Null deviance: 3.51283  on 8  degrees of freedom
Residual deviance: 0.01673  on 7  degrees of freedom
AIC: 37.99

Number of Fisher Scoring iterations: 3
```