Ayudantía 9.5 - MAT023

Fabián Ramírez / FabiMath

Problema 1

En un centro subterráneo de investigación bacteriológica, trabajan 25 científicos aislados del mundo exterior. Durante un accidente, uno de ellos se contagia con el mortal Virus-T, el cual se propaga por el aire dejando a sus víctimas en un estado letárgico y contagioso. Antes del contagio se había logrado determinar que la razón con la que se difunde el virus por vía aérea es directamente proporcional a la cantidad de individuos infectados $x(t)$ multiplicada por la cantidad de individuos sin infectar $y(t)$.

Una de las científicas, Helen, sabe que la única forma de salvarlos es encontrar el antídoto pronto, pero el virus se expande demasiado rápido. Si el tiempo t empieza a transcurrir cuando se infecta el primer científico, es decir $x(0) = 1$, y si se sabe que al cabo de 2 horas ya hay 5 científicos infectados, ¿cuanto tiempo tiene Helen para encontrar el antídoto antes de que estén todos infectados menos ella?

Problema 2

Un vehículo en "*panne*" está siendo remolcado mediante una cuerda, por una grúa a 16 pies por segundo. En algún instante la cuerda que tira el vehículo se rompe y éste continúa su movimiento en línea recta, pero frenándose con una velocidad proporcional a la raíz cuadrada de su velocidad instantánea. Transcurridos dos minutos después del rompimiento de la cuerda, se observa que la velocidad del vehículo es de 9 pies por segundo. ¿Cuánto es la distancia total que recorre el vehículo hasta quedar completamente detenido?

Problema 1

Sea $x = x(t)$ el número de infectados por el virus en el instante t. Como el laboratorio se encuentra aislado, observamos que la función $y = y(t)$, correspondiente al número de científicos no infectados, esta dada por:

$$y = 25 - x$$

Por tanto, el modelo matemático propuesto para la evolución de la infección, está dado por:

$$\frac{dx}{dt} = kx(25 - x), k > 0$$

Entonces, separando variables e integrando, tenemos:

$$\int \frac{dx}{x(25-x)} = k \int dt + Q$$

Ahora bien, por el método de descomposición mediante fracciones parciales, obtenemos:

$$\frac{1}{25} \int \frac{1}{x} - \frac{1}{25-x} dx = k \int dt + Q$$

Así:

$$\ln x - \ln(25 - x) = 25kt + Q$$

de donde:

$$\frac{x}{25-x} = Ce^{25kt}$$

y despejando x, obtenemos que:

$$x(t) = \frac{25Ce^{25kt}}{1 + Ce^{25kt}}$$

Ahora bien, como $x(0) = 1$, se sigue que $C = 1/24$. Luego, la ecuación anterior queda como:

$$x(t) = \frac{25e^{25kt}}{24 + e^{25kt}}$$

Además, como también $x(2) = 5$, la ecuación:

$$5 = \frac{25e^{50t}}{24 + e^{50t}} \quad (1)$$

implica que:

$$5e^{50t} = 24 + e^{50t}$$

y luego:

$$k = \ln 650$$

Reemplazando lo anterior en la ecuación (1), se obtiene finalmente que la función que modela el numero de infectados con el virus en el instante t esta dada por:

$$x(t) = \frac{25 \cdot 6^{t/2}}{6^{t/2} + 24}, t \geqslant 0$$

Finalmente, si definimos por T el instante en que todos los científicos, excepto Helen, están infectados, se tiene que:

$$x(T) = 24$$

i.e.

$$24 = \frac{25 \cdot 6^{T/2}}{6^{T/2} + 24}$$

Luego:

$$576 + 24 \cdot 6^{T/2} = 25 \cdot 6^{T/2}$$

de donde:

$$T = 2 \log_6 576$$

Por tanto, Helen, tiene a lo mas $T = 2 \log_6 576$ horas para hallar el antídoto del virus.

Problema 2

Sea $v = v(t)$ la velocidad del vehículo en el instante t. Debido a la variación de la velocidad producto del frenado, el modelo matemático para el problema es:

$$\frac{dv}{dt} = -k\sqrt{v}$$

donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad. Luego, al ser la ecuación anterior una ecuación diferencial de variables separables, tenemos que:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = -k\int dt + C$$

donde C es una constante arbitraria de integración. Así:

$$2\sqrt{v} = -kt + C$$

y luego:

$$v(t) = (C - kt)^2$$

Por otro lado, la condición inicial al romperse la cuerda es $v(0) = 16$ y la condición intermedia es $v(120) = 9$. Con lo anterior, obtenemos:

$$v(t) = \left(4 - \frac{t}{120}\right)^2$$

Ahora bien, el vehículo se detiene en el tiempo t_0 cuando $v(t_0) = 0$; luego, la ecuación

$$\left(4 - \frac{t_0}{120}\right)^2 = 0$$

implica que $t_0 = 480$. Finalmente, si $x(t)$ es el desplazamiento en línea recta del vehículo remolcado desde el corte de la cuerda hasta el instante t, tenemos que:

$$x(t) = \int_0^t v(s)ds$$

Así, dado que el tiempo que tarda en detenerse el vehículo es $t_0 = 480$, la distancia total recorrida está dada por:

$$\begin{aligned} x(480) &= \int^4 80_0 v(s)ds \\ &= \int^4 80_0 \left(4 - \frac{s}{120}\right)^2 ds \\ &= -120\int_4^0 u^2 du \\ &= 120 \cdot \frac{u^3}{3}\Big|_0^4 \\ &= 2560 \end{aligned}$$

En resumen, el vehículo recorrerá 2560 pies, desde su separación de la grúa hasta su detención total.