Ayudantía 4 - MAT023

Fabián Ramírez / FabiMath

Problema 1

Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(\sqrt{xy})}{y} & \text{si } y \neq 0 \quad \wedge \quad xy \geq 0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } y = 0 \quad \wedge \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ si $y \neq 0 \quad \wedge \quad xy \geq 0$

b) Calcule, en caso de existir $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

Problema 2

Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\left(\dfrac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

a) Determine el dominio de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

b) Determine si f es diferenciable en $(0,0)$.

Problema 3

Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^4+(y+1)^4}{(x-1)^2+(y+1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,-1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,-1) \end{cases}$$

a) ¿Es f diferenciable en (1,-1)?

b) ¿Es f continua en (1,-1)?

c) Determine $Df(0,0)$ (la derivada de f en (0,0))

d) Determine un vector normal del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(x,y,z) = (0,0,1)$

Solución Problema 1:

a) Si $y \neq 0 \quad \wedge \quad xy > 0$ entonces:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\sin\sqrt{(xy)}}{2\sqrt{(xy)}}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x\sin\sqrt{(xy)}}{2y\sqrt{(xy)}} - \dfrac{1-\cos\sqrt{(xy)}}{y^2}$

Si $y > 0 \quad \wedge \quad x = 0$ entonces:

- Notar que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1-\cos(\sqrt{hy})}{y}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos(\sqrt{hy})}{hy}\cdot\frac{1+\cos(\sqrt{hy})}{1+\cos(\sqrt{hy})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos^2(\sqrt{hy})}{hy}\cdot\frac{1}{1+\cos(\sqrt{hy})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin^2(\sqrt{hy})}{hy}\cdot\frac{1}{1+\cos(\sqrt{hy})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(\sqrt{hy})}{\sqrt{hy}}\cdot\frac{\sin(\sqrt{hy})}{\sqrt{hy}}\cdot\frac{1}{1+\cos(\sqrt{hy})}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- Notar que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,y+h)-f(0,y)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}\\
&= 0
\end{aligned}$$

b) Notar que

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{h}{2}}{h} = \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0-0}{h} = 0$

Solución Problema 2:

a) Notemos que:

- Para $y \neq 0$ se tiene que:
  - $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\sin\left(\dfrac{1}{y}\right)$
  - $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\sin\left(\dfrac{1}{y}\right) - \dfrac{x}{y}\cos\left(\dfrac{1}{y}\right)$
- Para $y = 0$ se tiene que dado $a \neq 0$ se cumple que:
  - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h,0)-f(a,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0-0}{h} = 0$

- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a,h)-f(a,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{ah\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} a\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)$ el cual no existe.

Para $(x,y)=(0,0)$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = 0$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0\cdot h\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)-0}{h} = 0$

Conclusión el dominio de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ es $\mathbb{R}^2$ y el de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\neq 0, \quad y=0\right\}$

b) Notemos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot k\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|hk\sin\left(\dfrac{1}{k}\right)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{\left|r\cos(\theta)\cdot r\sin(\theta)\sin\left(\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\right)\right|}{r} \quad \text{Coordenadas Polares} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\left|\cos(\theta)\sin(\theta)\sin\left(\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\right)\right|}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} r\left|\cos(\theta)\sin(\theta)\sin\left(\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\right)\right| \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pues $\left|\cos(\theta)\sin(\theta)\sin\left(\dfrac{1}{r\sin(\theta)}\right)\right| \leq 1$, finalmente f es diferenciable en (0,0).

Solución Problema 3:

a) Notemos que:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h,-1)-f(1,-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{h^4}{h^2}-0}{h} = 0$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1,-1+h)-f(1,-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{h^4}{h^2}-0}{h} = 0$ Ahora chequearemos si f es diferenciable.

$$\begin{aligned}
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|f(1+h,-1+k)-f(1,-1)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-1)\cdot h-\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-1)\cdot k\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{h^4+k^4}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^4+k^4}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^4(\theta)+r^4\sin^4(\theta)}{r^3} \quad \text{Coord. Polar} \\
&= \lim_{r\to 0} r\left(\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pues $\left|\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)\right| \leq 1$, finalmente f es diferenciable en $(1,-1)$.

b) Como f es diferenciable en $(1,-1)$, entonces f es continua en $(1,-1)$

c) Como f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, pues en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,-1)\}$ tiene sus primeras derivadas parciales continuas, por ende, f es diferenciable en tal conjunto. Ahora notemos que:

$$Df(0,0) = \left[\begin{array}{cc} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{array}\right]$$

Para $(x,y) \neq (1,-1)$ se tiene que:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{4(x-1)^3}{(x-1)^2+(y+1)^2} - \dfrac{2(x-1)\left((x-1)^4+(y+1)^4\right)}{\left((x-1)^2+(y+1)^2\right)^2}$ por tanto $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{4(y+1)^3}{(x-1)^2+(y+1)^2} - \dfrac{2(y+1)\left((x-1)^4+(y+1)^4\right)}{\left((x-1)^2+(y+1)^2\right)^2}$ por tanto $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$

Finalmente se tiene que $Df(0,0) = \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \end{array}\right]$

d) Un vector normal del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(x,y,z) = (0,0,1)$ es $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0), -1\right) = (-1,1,-1)$

Resumen Certamen 1

FabiMath

Los siguientes resultados pueden útiles para el estudio personal.

Derivadas parciales y Diferenciabilidad

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función.

1. Diremos que la derivada parcial de f con respecto a la primera coordenada (x) evaluada en (x, y) viene dada por:
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$
Y si dicho valor existe se denota por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, análogo se puede definir con respecto a la segunda coordenada (y).

2. Diremos que f es diferenciable en un punto (x, y) si:
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|f(x+h,y+k)-f(x,y)-\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot h+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot k\right)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$