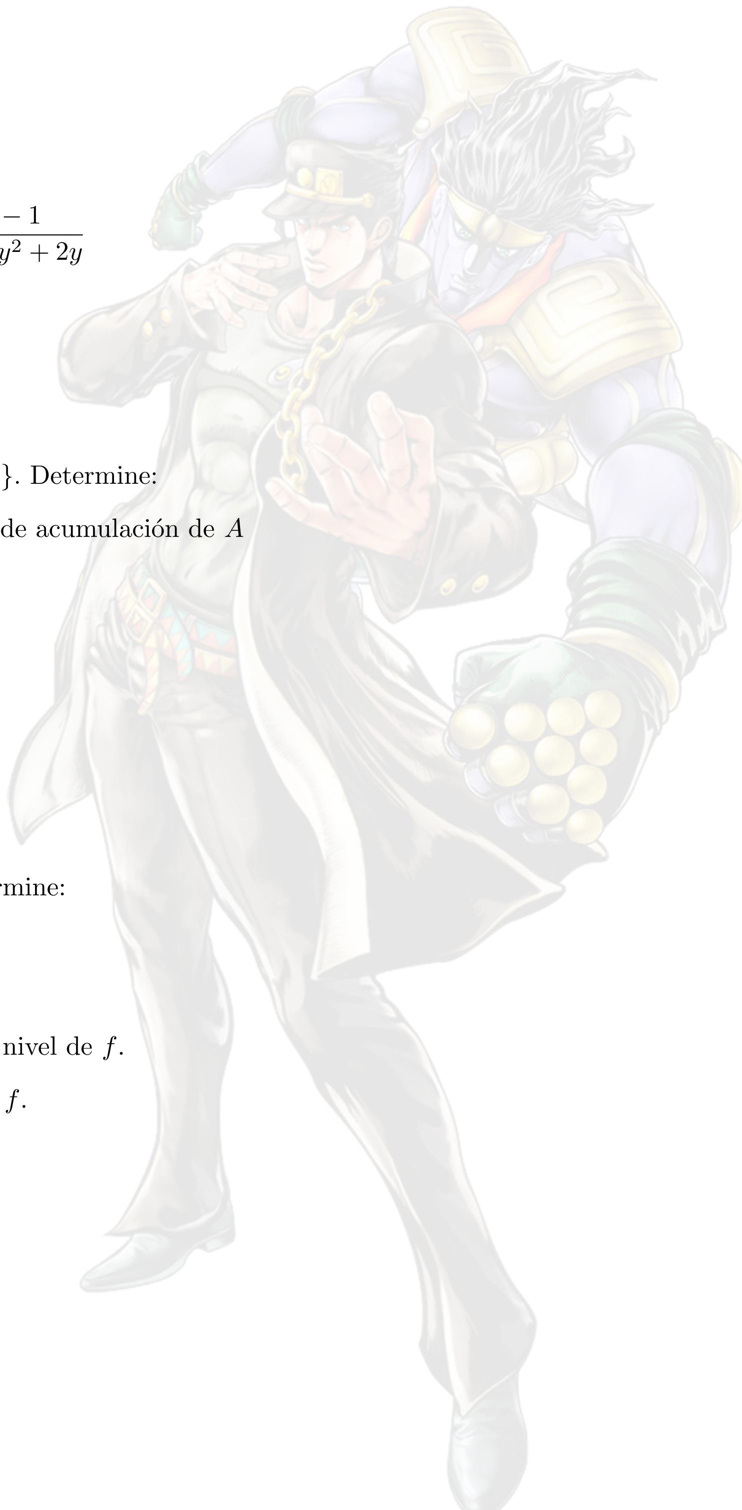
Ayudantía 3 - MAT023

Fabián Ramírez / FabiMath



Problema 1

Calcule los siguientes límites

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{\sin(4-xy)}{16-x^2y^2}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{xy+x-y-1}{x^2-2x+2+y^2+2y}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|^3\sin(x^2)}{|x|+y^4}$

Problema 2

Sea $A :=]-1,1[\cup \{\frac{1+2n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}\}$. Determine:

a) El conjunto de los puntos de acumulación de A

b) $int(A)$ (interior de A)

c) $\bar{A}$ (clausura de A)

d) ∂A (frontera de A)

e) Si A es abierto o cerrado.

Problema 3

Sea $f(x,y) = 25 - x^2 - y^2$ determine:

a) El dominio maximal de f.

b) El recorrido de f.

c) La forma de las curvas de nivel de f.

d) Un gráfico aproximado de f.

Solución Problema 1:

a) Notemos que con el cambio de variable $u = xy$ se tiene que cuando $(x,y) \to (2,2)$ se tiene que $u \to 4$ entonces

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{\sin(4-xy)}{16-x^2y^2} &= \lim_{u\to4} \frac{\sin(4-u)}{16-u^2}\\ &= \lim_{u\to4} \frac{\cos(4-u)(-1)}{-2u} \quad {}_{Por \quad regla \quad de \quad L'hopital}\\ &= \frac{(1)(-1)}{(-2)(4)}{}_{Evaluando}\\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

b) Notemos que mediante los cambios de variable $u = x-1$ y $v = y+1$ tenemos que cuando $x \to 1$ y $y \to -1$ entonces $u \to 0$ y $v \to 0$ por lo tanto el límite a calcular sera de la forma:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{xy+x-y-1}{x^2-2x+2+y^2+2y} &= \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{(u+1)(v-1)+(u+1)-(v-1)-1}{(u+1)^2-2(u+1)+2+(v-1)^2+2(v-1)}\\ &= \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{uv}{u^2+v^2}\end{aligned}$$

Ahora mediante el cambio de variable en coordenadas polares $u = r\cos\theta$ y $v = r\sin\theta$ $(\forall\theta \in \mathbb{R}$, luego cuando $(u,v) \to (0,0)$ se tiene que $r \to 0$, finalmente:

$$\begin{aligned}\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{uv}{u^2+v^2} &= \lim_{r\to0} \frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta}\\ &= \lim_{r\to0} \frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}\\ &= \lim_{r\to0} \frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\\ &= \lim_{r\to0} \sin\theta\cos\theta\\ &= \sin\theta\cos\theta \quad \forall\theta\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Luego como este limite es $\sin\theta\cos\theta \quad \forall\theta \in \mathbb{R}$, tenemos una contradicción con la únicidad de límite. Por lo tanto, por contradicción concluimos que no existe límite.

c) En primer lugar verificaremos los limites laterales para tener una idea de cual sería el valor del límite. Entonces:

- $$\begin{aligned}\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0} \frac{|y|^3\sin(x^2)}{|x|+y^4}\right) &= \lim_{y\to0} \frac{|y|^3\sin(0)}{|0|+y^4}\\ &= \lim_{y\to0} 0\\ &= 0\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0} \frac{|y|^3\sin(x^2)}{|x|+y^4}\right) &= \lim_{x\to0} \frac{|0|^3\sin(x^2)}{|x|+0}\\ &= \lim_{x\to0} 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Ahora nuestro candidato a límite (si es que existe) es 0 pues si el limite fuese a existir entonces debe ser igual a los limites laterales. Ahora por teorema de compresión, vamos a acotar a la función $\dfrac{|y|^3\sin(x^2)}{|x|+y^4}$ de tal manera de estimar que el límite es 0. Entonces:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{|y|^3\sin(x^2)}{|x|+y^4}-0\right| &\leq \left|\frac{|y|^3x^2}{|x|+y^4}\right| \\
&\leq \left|\frac{|y|^3x^2}{|x|}\right| \\
&\leq \left||y|^3x\right| \\
&\longrightarrow 0 \quad \textit{cuando} \quad (x,y)\to(0,0)
\end{aligned}$$

Por lo tanto como la función en valor absoluto converge a 0, por teorema visto en clases tenemos que la función sin valor absoluto converge a 0, por tanto por teorema de compresión podemos concluir que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|^3\sin(x^2)}{|x|+y^4}=0$$

Solución Problema 2:

a) Recordemos que $x\in A$ es punto de acumulación si para todo abierto $U\subset A$ tal que $x\in U$ se tiene que $U\cap(A-\{x\})\neq\emptyset$. Notemos que todo x en $]-1,1[$ es punto de acumulación pues $]-1,1[$ es un conjunto abierto. Notemos que $\{-1\}$ es punto de acumulación pues si encerramos al valor -1 en un intervalo abierto este si o si va a intersectar con el conjunto A. Análogamente tendremos que 1 es punto de acumulación. Finalmente notemos que $\{\frac{1+2n}{n},\forall n\in\mathbb{N}\}$ se puede escribir de la forma $\{\frac{1}{n}+2,\forall n\in\mathbb{N}\}$. Notemos que $\{2\}$ es punto de acumulación pues siempre lo podemos encerrar con un abierto que intersecta con A gracias a que siempre va a existir un n_0 tal que $\{2\}\cap\{2+\frac{1}{n_0}\}\neq\emptyset$. Finalmente tenemos que el conjunto de los puntos de acumulación denotado por $A':=[-1,1]\cup\{2\}$.

b) Recordemos que un punto x pertenece al interior de A si existe un abierto B en la topología tal que $x\in B\subset A$. Entonces notemos que $]-1,1[\subset int(A)$ pues]-1,1[es abierto. Notemos además que no existe ningún abierto que contenga a algún elemento del conjunto $\{\frac{1+2n}{n},\forall n\in\mathbb{N}\}$. Por lo tanto $int(A)=]-1,1[$.

c) Recordemos que $\bar{A}=A\cup A'$ por tanto $\bar{A}=[-1,1]\cup\{\frac{1+2n}{n},\forall n\in\mathbb{N}\}\cup 2$

d) Recordemos que $\partial A=\bar{A}-int(A)$ entonces $\partial A=\{-1,1,2\}\cup\{\frac{1+2n}{n},\forall n\in\mathbb{N}\}$.

e) A no es abierto pues $int(A)\neq A$ y A no es cerrado pues $\bar{A}\neq A$.

Solución Problema 3:

a) Notemos que no existe un vector en $\mathbb{R}^2$ tal que f se indefina. Por tanto el dominio maximal de f es $\mathbb{R}^2$

b) Sea $z = f(x,y)$ entonces:

$$\begin{aligned} z = 25 - x^2 - y^2 \Rightarrow z - 25 &= -(x^2+y^2) \\ &\Rightarrow z - 25 \leqslant 0 \\ &\Rightarrow z \leqslant 25 \end{aligned}$$

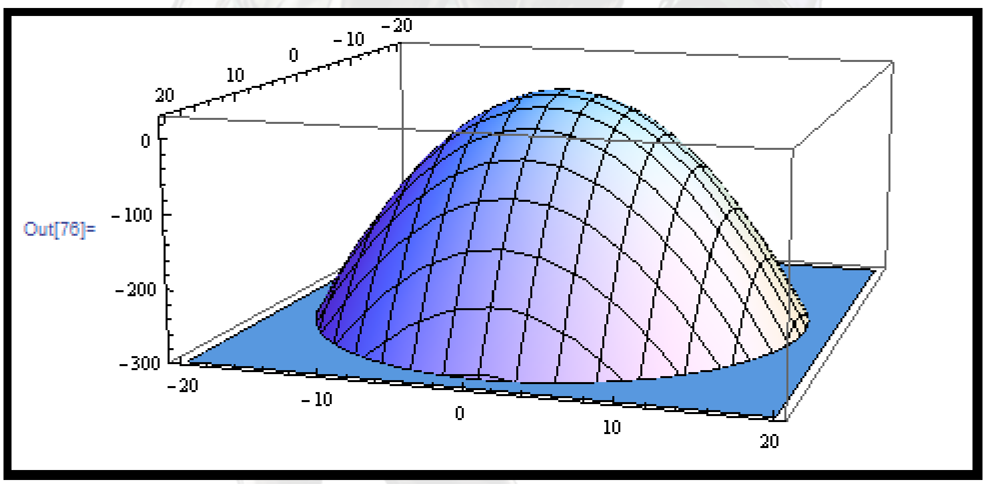
Por lo tanto $f(x,y) \in (-\infty, 25]$ es decir $\operatorname{Rec}(f) = (-\infty, 25]$

c) Sea $C \in (-\infty, 25]$ una constante en el recorrido de f entonces:

$$\begin{aligned} C = 25 - (x^2+y^2) \Rightarrow 25 - C &= x^2 + y^2 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 = (\sqrt{25 - C})^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto las curvas de nivel de f son circunferencias de radio $\sqrt{25 - C}$.

d) El gráfico es de la siguiente forma:



Resumen Certamen 1

FabiMath

Los siguientes resultados pueden útiles para el estudio personal.

Técnica para calcular limites en varias variables

Para calcular un limite en varias variables puedes seguir los siguientes pasos.

1. Proponer un cambio de variable y calcular un limite en menos cantidad de variables.
2. Si no funciona lo anterior, puedes proponer otro cambio de variable que facilite el calculo del limite, como por ejemplo el cambio de variable a coordenadas polares.
3. Si no funciona lo anterior, puedes calcular los limites iterados para tener una idea de cual es el valor del límite **SI ES QUE EXISTE!**, luego que obtengas el valor procede a utilizar el teorema de compresión para demostrar que el límite existe.
4. Si no funciona lo anterior pues no puedes acotar la desigualdad, entonces es **probable** que el límite no exista. Para demostrar la no existencia de un limite puedes utilizar alguna trayectoria. En particular suele ser conveniente usar una trayectoria de la forma (t, t^n) para algún $n \in \mathbb{R}$ por determinar.

Topología

1. Sea X un conjunto, diremos que τ es una topología sobre X si:
   a) $X, \varnothing \in \tau$
   b) La unión finita e infinita de elementos de τ esta en τ.
   c) La intersección **finita** de elementos de τ esta en τ A los elementos de τ los llamaremos **abiertos**
2. Si A es un abierto entonces A^c es un cerrado.
3. Llamaremos puntos de adherencia de X a aquellos elementos que no pertenecen a X pero pueden aproximarse por una sucesión de elementos de X. Al conjunto de todos estos puntos se le llamara clausura de X y se denota por $\overline{X}$.
4. Llamaremos interior de X al conjunto de puntos para los cuales existe un abierto que contiene a dicho punto y el abierto esta completamente contenido en X.