Ayudantía 3.5 - MAT023

Fabián Ramírez / FabiMath

Problema 1

Calcule los siguientes limites

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} \dfrac{(x-2)^2(y-3)^3}{(x-2)^8+(y-3)^4}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+\sin^2(y)}{2x^2+y^2}$

c) $\lim\limits_{(x,yz)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2yz}{x^4+y^2z^2+z^4}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$

Problema 2

Sea:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad |y|<x^2 \\ 1 & \text{si} \quad |y|\geq x^2 \end{cases}$$

Determine el dominio de continuidad de f

Problema 3

Sea:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos(\sqrt{xy})}{y} & \text{si } y\neq 0 \quad \wedge \quad xy\geq 0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } y=0 \quad \wedge \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Obtenga el dominio de continuidad de f.

Solución Problema 1:

a) Sean $u = x-2, v = y-2$ entonces:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u^2v^3}{u^8+v^4}$$

Aproximándonos a $(0,0)$ por la familia dada por $v = mu^2$

$$\lim_{u\to 0} \frac{u^2\left(mu^2\right)^3}{u^8+\left(mu^2\right)^4} = \lim_{u\to 0} \frac{m^3u^8}{u^8+m^4u^8} = \lim_{u\to 0} \frac{m^3u^8}{\left(1+m^4\right)u^8} = \frac{m^3}{1+m^4}$$

depende de m y por unicidad del límite, se tiene que el límite no existe.

b) Aproximándonos a $(0,0)$ por la familia dada por $y = mx$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+\sin^2(mx)}{2x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+\sin^2(mx)}{\left(2+m^2\right)x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+m^2\cdot\frac{\sin(mx)}{mx}\cdot\frac{\sin(mx)}{mx}}{2+m^2} == \frac{1+m^2}{2+m^2}$$

depende de m y por unicidad del límite, se tiene que el límite no existe.

c) Aproximándonos a $(0,0,0)$ por la familia dada por $\varphi(t) = (t, mt, t)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2\cdot mt\cdot t}{t^4+(mt)^2t^2+t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{mt^4}{\left(2+m^2\right)t^4} = \frac{m}{2+m^2}$$

depende de m y por unicidad del límite, se tiene que el límite no existe

d) Usando coordenadas polares el limite se convierte en:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2(\theta)+r\cos(\theta)\cdot r\sin(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2+r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{r^2} = 1+\cos(\theta)\sin(\theta)$$

como depende de θ y por unicidad del límite, se concluye que no existe el límite.

Solución Problema 2:

Pauta exclusiva de ayudantía, pero basta darse cuenta que es continua excepto en (a, a^2)

Solución Problema 3:

Notar que:

$$0 \leq \left|\frac{\sin\left((x-1)^3\right)}{(x-1)^2+(y-2)^2}\right| = \frac{\left|\sin\left((x-1)^3\right)\right|}{(x-1)^2+(y-2)^2} \leq \frac{|x-1|^3}{(x-1)^2+(y-2)^2} \leq |x-1|$$

Luego:

$$\lim_{(xy)\to(1,2)} 0 = \lim_{(xy)\to(1,2)} |x-1| = 0$$

Por teorema del acotamiento:

$$\lim_{(xy)\to(1,2)} \left|\frac{\sin\left((x-1)^3\right)}{(x-1)^2+(y-2)^2}\right| = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f \text{ es continua en } (1,2)$$