Ayudantía 2 - MAT023

Fabián Ramírez / FabiMath

Problema 1

Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_1[x]$ una transformación lineal tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

con $\mathcal{B}_1 := \{(1,1),(0,1)\}$ y $\mathcal{B}_2 := \{x+1, x-1\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}_1[x]$ respectivamente.

a) Determine si T es un isomorfismo.

b) Determine explicitamente $T(x,y)$

c) Sea $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_1[x]$ una transformación lineal tal que:

$$[G]_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{C}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\mathcal{C}_1 := \{x, 1\}$ y $\mathcal{C}_2 := \{(1,0),(1,1)\}$. Determine $[G \circ T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{C}_2}$.

Problema 2

Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ definida por$T(a,b) = (2a+b)x^2 + b$

a) Muestre que T es una transformación lineal.

b) Determine $\ker T$ e $\mathrm{Im} T$

c) ¿Es T inyectiva? ¿Es T epiyectiva?

Problema 3

Sea $T : \mathbb{R}_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ definida por

$$T(p(x)) = xp(x)$$

.

a) Pruebe que T es una transformación lineal.

b) Determinar la dimensión de la imagen y el kernel de T.

c) Obtenga $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ con $\mathcal{B} := \{1, 1+x\}$ y $\mathcal{C} := \{1, x, x^2+1\}$ que son bases de $\mathbb{R}_1[x]$ y $\mathbb{R}_2[x]$ respectivamente.

d) a partir de $[T]_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}}$ determine $[T]_{\mathbb{B}'}^{\mathbb{C}'}$ donde $B' := \{1, x\}$ y $C' := \{1, x, x^2\}$ son bases de $\mathbb{R}_1[x]$ y $\mathbb{R}_2[x]$ respectivamente.

Solución Problema 1:

a) Notemos que para que T sea un isomorfismo entonces la matriz asociada a T en cualquier base tiene que ser invertible (Puesto que T es un operador lineal); lo cual es equivalente a probar que el determinante de $[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ es distinto de 0, por tanto:

$$\begin{aligned}\det\left([T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}\right) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}\\ &= (1)(-6)-(3)(-2)\\ &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto T no es un isomorfismo.

b) En primer lugar debemos determinar la forma de un vector en $\mathbb{R}^2$ en la base $\mathcal{B}_1$. Entonces dado $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(a,b)=\alpha(1,1)+\beta(0,1) &\Rightarrow (a,b)=(\alpha,\alpha+\beta)\\ &\Rightarrow \alpha=a\wedge\beta=b-a\\ &\Rightarrow [(a,b)]_{\mathcal{B}_1}=\begin{pmatrix} a \\ b-a \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Notemos además que:

$$\begin{aligned}[T(a,b)]_{\mathcal{B}_2} &= [T]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}[(a,b)]_{\mathcal{B}_1}\\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b-a \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} -2a+3b \\ 4a-6b \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Con esto podemos concluir que:

$$\begin{aligned}T(a,b) &= (-2a+3b)(x+1)+(4a-6b)(x-1)\\ &= 2ax-6a-3bx+9b\\ &= (2a-3b)x+(-6a+9b)\end{aligned}$$

y con esto encontramos la transformación de forma explicita.

c) Notemos que $[G\circ T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{C}_2}=[G]_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{C}_2}[Id]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{C}_1}[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$. Calcularemos $[Id]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{C}_1}$ entonces:

$$\begin{aligned}Id(x+1) &= 1\cdot x+1\cdot 1\\ Id(x-1) &= 1\cdot x+(-1)\cdot 1\\ \Rightarrow [Id]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{C}_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Finalmente:

$$[G\circ T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{C}_2}=[G]_{\mathcal{C}_1}^{\mathcal{C}_2}[Id]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{C}_1}[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Solución Problema 2:

a) Sea $u=(c,d),\quad v=(p,q)\quad y\quad \alpha\in\mathbb{R}$ entonces:

$$\begin{aligned}T(a\bullet u+v) &= T((\alpha a,\alpha b)+(p,q))=T((\alpha a+p,\alpha b+q))\\ &= (2(\alpha a+p)+\alpha b+q)x^2+\alpha b+q\\ &= \alpha\left((2a+b)x^2+b\right)+(2p+q)x^2+q\\ &= \alpha T(u)+T(v)\end{aligned}$$

Luego, T es una transformación lineal.

b) Tomamos $T((a,b)) = 0$ luego

$$\begin{aligned}
&(2a+b)x^2 + b = 0\\
&2a + b = 0 \quad \wedge \quad b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b = 0\\
&(a,b) \in \mathrm{Ker}(T) \Leftrightarrow (a,b) = (0,0)\\
&\mathrm{Ker}(T) = \{(0,0)\}
\end{aligned}$$

y para la imagen una base de $\mathbb{R}^2$ es por ejemplo $B = \{(1,0),(0,1)\}$ luego

$$\mathrm{Im}(T) = \langle T(1,0), T(0,1)\rangle = \langle 2x^2, x^2+1\rangle$$

c) Notar que $\mathrm{Ker}(T) = \{(0,0)\} \Rightarrow T$ inyectiva. Luego $\mathrm{Im}(T) \neq IR_2[x]$ pues $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2 \neq \dim(IR_2[x]) = 3$ finalmente T no es sobreyectiva.

Solución Problema 3:

a) Notemos que para que T defina una transorfación lineal es equivalente probar que dado $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_1[x]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$T(p(x) + \lambda q(x)) = T(p(x)) + \lambda T(q(x))$$

En efecto pues:

$$\begin{aligned}
T(p(x) + \lambda q(x)) &= x(p(x) + \lambda q(x))\\
&= xp(x) + \lambda x q(x)\\
&= T(p(x)) + \lambda T(q(x))
\end{aligned}$$

De esta forma, queda verificado que T es lineal.

b) En primer lugar calcularemos la dimensión del kernel de T. Para realizarlo encontraremos una base para el kerner de T. Es decir para el conjunto:

$$\ker(T) := \{p(x) \in \mathbb{R}_1[x] : T(p(x)) = 0\}$$

Sea $p(x) = ax + b$, entonces

$$\begin{aligned}
T(p(x)) = 0 &\Rightarrow xp(x) = 0\\
&\Rightarrow x(ax+b) = 0\\
&\Rightarrow x = 0 \vee ax + b = 0\\
&\Rightarrow a = 0 \wedge b = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto una base para el kernel de T es el conjunto $\{0\}$, y por ende la dimensión del kernel de T es 0.
Ahora calcularemos la dimensión de la imagen de T. Por el teorema de nucleo-imagen tenemos que:

$$rango(T) + null(T) = \dim(\mathbb{R}_1[x])$$

Entonces despejando se tiene que:

$$rango(T) = 2$$

Por lo tanto la dimensión de la imagen de T es 2.

c) Para encontrar $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ seguimos los siguientes pasos:

- Dada la base $\mathcal{B} := \{1, 1+x\}$, tenemos que evaluar estos elementos en la función T.

$$T(1) = x \quad T(1+x) = x + x^2$$

- Luego hay que escribir estos valores en terminos de la base $\mathcal{C} := \{1, x, x^2+1\}$, entonces:

$$T(1) = x = 0\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot(x^2+1) \quad T(1+x) = x + x^2 = (-1)\cdot 1 + 1\cdot x + 1\cdot(x^2+1)$$

- Finalmente con los escalares que multiplican a los elementos de la base armamos la matriz asociada a la transformación lineal, que en este caso es de la forma:

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 1\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Notemos que $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} = [Id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[Id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ Entonces:

- $Id(1) = 1 = (1)1 + (0)x(0)x^2$
  $Id(x) = (0)1 + (1)x(0)x^2$
  $Id(x^2+1) = (1)1 + (0)x(1)x^2$

  Esto implica que

$$[Id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $Id(1) = (1)(1) + (0)(1+x)$
  $Id(x) = (-1)(1) + (1)(1+x)$

  Esto implica que

$$[Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente tenemos que:

$$[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} = [Id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[Id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$