Ayudantía 2.5 - MAT023

Fabián Ramírez / FabiMath

Problema 1

Considerar $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ tal que $T(p(x)) = xp(x+1)$

a) Pruebe que T es una aplicación lineal.

b) Pruebe que T es inyectiva.

c) Considerar

$$\mathcal{B} = \left\{1, x+1, 1-x^2\right\}$$
$$\mathcal{C} = \left\{1, x+1, x^2+1, x^3+1\right\}$$

Bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}_3[x]$ respectivamente. Encuentre la matriz de T en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.

Problema 2

Sean $\mathcal{B} = \{(1,1), (-1,2)\}$, $\mathcal{C} = \{(2,-1), (2,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Sea $T\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar $[T]_{\mathcal{C}}$

Problema 3

Sean U y V los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^5$ y $\mathbb{R}^4$ generados, respectivamente, por:

$$\mathcal{B} = \{(1,2,0,1,-1), (0,1,-1,1,1), (0,0,0,1,1)\}$$
$$\mathcal{D} = \{(1,-1,0,1), (0,0,-1,1)\}$$

Considere $T : U \to V$ la transformación lineal definida a través de su matriz asociada:

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenga bases para $\ker T$ e $\mathrm{Im} T$.

Problema 4

Determine una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique las siguientes condiciones:

- 2 sea un valor propio de T y el espacio propio asociado a 2 este generado por $\{(1,1,1)\}$.
- T sea un isomorfismo.
- T sea diagonalizable.

Solución Problema 1

a) Sea $\alpha \in \mathbb{R}; p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$. Considerar $h(x) = \alpha p(x) + q(x)$, se cumple:

$$\begin{aligned} T(\alpha p(x) + q(x)) &= T(h(x)) = xh(x+1) = x(\alpha p(x+1) + q(x+1)) \\ &= \alpha(xp(x+1)) + xq(x+1) = \alpha T(p(x)) + T(q(x)) \end{aligned}$$

Por tanto T es lineal

b) Sea $p(x) = ax^2 + bx + c \in \operatorname{Ker}(T)$ entonces:

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= x\left(a(x+1)^2 + b(x+1) + c\right) = x\left(ax^2 + (2a+b)x + (a+b+c)\right) \\ &= ax^3 + (2a+b)x^2 + (a+b+c)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Por tanto $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$ y T es inyectiva.

c) Notemos que:

$$\begin{aligned} T(1) = x &= -1\cdot 1 + 1\cdot(x+1) + 0\cdot\left(x^2+1\right) + 0\cdot\left(x^3+1\right) \\ T(x+1) = x^2 + 2x &= -3\cdot 1 + 2\cdot(x+1) + 1\cdot\left(x^2+1\right) + 0\cdot\left(x^3+1\right) \\ T\left(1-x^2\right) = -2x^2 - x^3 &= 3\cdot 1 + 0\cdot(x+1) - 2\cdot\left(x^2+1\right) - 1\cdot\left(x^3+1\right) \end{aligned}$$

Luego se tiene que:

$$[T]_{\mathcal{B}}^{c} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución Problema 2

Notemos que $[T]_{\mathcal{C}} = [I]_{\mathcal{B}}^{C}[T]_{\mathcal{B}}[I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, luego:

$$\begin{aligned} (2,-1) &= 1\cdot(1,1) - 1\cdot(-1,2) \\ (2,1) &= \frac{5}{3}(1,1) - \frac{1}{3}(-1,2) \end{aligned}$$

Entonces $[I]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, y calculando su inversa $[I]_{\mathcal{B}}^{C} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. Finalmente tenemos que:

$$[T]c = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{13}{6} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Solución Problema 3

Sean $\vec{v} \in U$ en el $\operatorname{Ker}(T)$ y sean $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ las coordenadas de $\vec{v}$ en la base $\mathcal{B}$. Luego:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{aligned} 2\alpha + \beta - \gamma &= 0 \\ -\alpha + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

de donde se obtiene que: $\beta = -\alpha$y $\quad \gamma = \alpha$ y $\quad \alpha$ es un parametro en $\mathbb{R}$, por lo tanto:

$$\vec{v} \in \operatorname{Ker}(T) \Leftrightarrow \vec{v} = \alpha(1,2,0,1,-1) - \alpha(0,1,-1,1,1) + \alpha(0,0,0,1,1) = \alpha(1,1,1,1,-1)$$

Por lo tanto una base de $\operatorname{Ker}(T)$ es $\{(1,1,1,1,-1)\}$. Luego $\dim(\mathrm{Im(T)}) = 2$. Luego:

$$\begin{aligned} Im(T) &= \langle (T(1,2,0,1,-1), T(0,1,-1,1,1), T(0,0,0,1,1) \rangle \\ &= \langle (2,-2,1,1), (1,-1,0,1), (-1,1,-1,0) \rangle \\ &= \langle (1,-1,0,1), (-1,1,-1,0) \rangle \end{aligned}$$

Luego una base de la imagen es Im(T) es $\{(1,-1,0,1),(-1,1,-1,0)\}$

Solución Problema 4

Existen muchas (infinitas) transformaciones lineales que satisfacen lo pedido. Construiremos una de ellas. Considere la base $B=\{(1,1,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y definamos la transformación lineal en la base B, por ejemplo, de la siguiente forma:

$$T(1,1,1)=2(1,1,1), \quad T(1,0,0)=(1,0,0), \quad T(0,1,0)=(0,1,0)$$

De esta definición se tiene que B es una base de vectores propios de T. Sea $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, entonces:

$$(x,y,z)=\alpha(1,1,1)+\beta(1,0,0)+\gamma(0,1,0)$$

De donde concluimos que $\alpha=z,\beta=x-z$ y $\gamma=y-z$. Así:

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= zT(1,1,1)+(x-z)T(1,0,0)+(y-z)T(0,1,0) \\ &= z(2,2,2)+(x-z)(1,0,0)+(y-z)(0,1,0) \\ &= (x+z,y+z,2z) \end{aligned}$$

Como B es una base de vectores propios, T es diagonalizable y su representación matricial en B es:

$$[T]_B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además como $\det([T]_B)=2\neq 0$ concluimos que T es un isomorfismo.