Ayudantía 0 - MAT023

Fabián Ramírez / FabiMath

Problema 1

Sea f una función periódica de periodo igual a $2L = 10$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -5 < x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x < 5 \end{cases}$$

a) Determine la serie de Fourier trigonométrica de f.

b) Usando la identidad de Parseval $\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(f(x))^2dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$, calcule el valor de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

Problema 2

Determine la serie de senos y, de cosenos de la función f definida por $f(x) = ax$ si $0 < x < \pi$ siendo $a \in \mathbb{R}^+$

Problema 3

Calcular la serie de Fourier de $f(x) = |x|$ con $x \in [-1, 1]$ y calcule $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$

Solución Problema 1:

a) Notemos que $10 = 2L \quad \Rightarrow \quad L = 5$, entonces tenemos que:

- $a_0 = \dfrac{1}{5}\displaystyle\int_{-5}^{5} f(x)dx = \dfrac{1}{5}\left(\int_{-5}^{0} 0dx + \int_{0}^{5} 3dx\right) = 3$
- $a_n = \dfrac{1}{5}\displaystyle\int_{-5}^{5} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx = \frac{1}{5}\left(\int_{-5}^{0} 0\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx + \int_{0}^{5} 3\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx\right) = \frac{3\sin(n\pi)}{\pi n}$

Como $\sin(n\pi) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces tenemos que:

- $a_n = 0$
- $b_n = \dfrac{1}{5}\displaystyle\int_{-5}^{5} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx = \frac{1}{5}\left(\int_{-5}^{0} 0\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx + \int_{0}^{5} 3\sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx\right) = \frac{3(1-\cos(n\pi))}{n\pi} = \frac{3\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi}$

Luego como $f(x) \simeq \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)$ entonces:

$$f(x) \simeq \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)$$

Como $1-(-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ 2 & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}$ se puede reescribir la serie.
Sea $n = 2k-1$ entonces:

$$f(x) \simeq \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\cdot 2}{(2k-1)\pi}\sin\left(\frac{(2k-1)\pi x}{5}\right) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\left(\frac{(2k-1)\pi x}{5}\right)$$

b) Notemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(f(x))^2dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) &\implies \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(f(x))^2dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \\
&\implies \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(f(x))^2dx = \frac{1}{5}\left(\int_{-5}^{0} 0dx + \int_{0}^{5} 9dx\right) = 9 \\
&\implies 9 = \frac{9}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi}\right)^2 \\
&\implies \frac{9}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9\left(1-(-1)^n\right)^2}{n^2\pi^2} \\
&\implies \frac{9}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{9\cdot 4}{(2k-1)^2\pi^2} \\
&\implies \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

Solución Problema 2:

Notemos que $L = \pi$, entonces:

- **Serie de senos**

Notemos que $f(x) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ luego:

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)dx \\
b_n &= \frac{2a}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx \quad (\text{ integrando por partes }) \\
b_n &= -\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{-\sin(n\pi)+n\pi\cos(n\pi)}{n^2}
\end{aligned}
$$

Luego $\sin(n\pi)=0$ y $\cos(n\pi)=(-1)^n$ para $n\in\mathbb{N}$ entonces:

$$
b_n = -\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{n\pi(-1)^n}{n^2} = \frac{2a(-1)^{1+n}}{n}
$$

Finalmente:

$$
f(x) \simeq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a(-1)^{1+n}}{n}\sin(nx)
$$

- **Serie de cosenos**

Notemos que $f(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)$ luego:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2a}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = a\pi \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)dx \\
a_n &= \frac{2a}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx \ (\text{integrando por partes}) \\
a_n &= \frac{2a}{\pi}\cdot\frac{\cos(n\pi)+n\pi\sin(n\pi)-1}{n^2} \\
a_n &= \frac{2a}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2} = \frac{2a\left((-1)^n-1\right)}{n^2\pi}
\end{aligned}
$$

Luego $f(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)$ entonces:

$$
f(x) \simeq \frac{a\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a\left((-1)^n-1\right)}{n^2\pi}\cos(nx)
$$

Pero como $(-1)^n - 1 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \quad \text{es par} \\ -2 & \text{si } n \quad \text{es impar}\end{cases}$ se puede reescribir la serie. Sean $n = 2k-1$ entonces:

$$
f(x) \simeq \frac{a\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2a\cdot(-2)}{(2k-1)^2\pi}\cos((2k-1)x) = \frac{a\pi}{2} - \frac{4a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)x)
$$

Solución Problema 3:

Notemos que $L=1$ y como f es una función par $b_n = 0$ entonces resta calcular a_0 y a_n, por ende:

$$
a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{1}\int_0^1 |x|dx = \frac{2}{1}\int_0^1 xdx = 1
$$

y

$$
a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{1}\right)dx = \frac{2}{1}\int_0^1 |x|\cos(n\pi x)dx = 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx = \frac{2(\pi n\sin(\pi n)+\cos(\pi n)-1)}{\pi^2 n^2}
$$

Luego $\sin(n\pi) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, y $\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ Entonces:

$$a_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2}$$

Por lo que se tiene que:

$$f(x) \simeq \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n^2\pi^2} \cos(nx)$$

Como:

$$(-1)^n - 1 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ -2 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Se puede reescribir la serie, sea $n = 2k - 1$ entonces:

$$f(x) \simeq \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-2)}{(2k-1)^2\pi^2} \cos((2k-1)x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{-4}{\pi^2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x)$$

Con esto se obtiene la serie de Fourier. Ahora por parseval se tiene que

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} (f(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

Reemplazando para nuestro caso tenemos que:

$$\int_{-1}^{1} |x|^2 dx = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi^2 n^2}\right)^2$$

Sea $n = 2k - 1$ entonces:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{16}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$$

Reordenando tenemos que:

$$\frac{\pi^4}{96} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$$